جامعة البعث الامتحان الإضافي 2015-2014 الاسم :

كلية العلوم قسم الرياضيات بنى جبرية (3) المدة : ساعة ونصف

السؤال الأول (30) درجة:

ليكن المودول M على الحلقة الواحدية R، وليكن $m \in M$، والمطلوب:

1) أثبت أن المجموعة: $Rm = \{rm : r \in R\}$ تؤلف مودولاً جزئياً في المودول M.

2) إذا كانت R حقلاً ، فأثبت أن M عديم الفتل.

3) أثبت أن M بسيط إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$M \neq 0, \forall m \in M : (m \neq 0 \Rightarrow Rm = M)$$

السؤال الثاني (30) درجة :

نفرض أن $f \in Hom_R(M, N)$، والمطلوب:

1) أثبت أن المتتالية: $0 \longrightarrow Ker f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} N / im f \longrightarrow 0$

تامة.

2) إذا كان f غامراً و M نصف بسيط ، فأثبت أن N نصف بسيط أيضاً.

السؤال الثالث (20) درجة :

ليكن المودول M على الحلقة الواحدية R، ولنفرض أن M يمكن أن يتولد بـ s عنصراً من عناصره وليكن U مودولاً جزئياً في M. والمطلوب:

1) أثبت أن M / U يمكن أن يتولد بـ s عنصراً من عناصره.

2) إذا كان $M = U \oplus V$ ، فأثبت أن V يمكن أن يتولد بـ s عنصراً من عناصره.

السؤال الرابع (20) درجة :

ليكن المودول M على الحلقة الواحدية R، والمطلوب إثبات تكافؤ الشرطين الآتيين:

1) M نيوثري. 2) M يحقق الشرط الأعظمي.

د.ياسين خلوف

سلم تصحيح بنية جبرية (٢) الامتحان الفصلي ٢٠١٥-٢٠١٦

د. ... [illegible]

السؤال الأول (30)

1) إذا كان $m \in M$ فإن $0_R m = 0_M$ إذاً $0_M \in Rm$ ، $Rm \neq \phi$.

وليكن $r_1, r_2 \in R$ ، $\forall r_1, r_2 \in R : r_1 m , r_2 m \in Rm$.

$r_1 m - r_2 m = (r_1 - r_2) m = r_3 m \in Rm$

ومن ... $\forall r \in R, \forall r_1 \in R : r_1 (r m) = (r_1 r) m = r' m \in Rm$

ومن هنا ينتج أن $Rm \subset M$

2) إذا كانت R حلقة ، $0 \neq r \in R$ فيوجد $r^{-1} \in R$ بحيث يكون

$r m = 0_M \Rightarrow r^{-1}(r m) = r^{-1} 0_M = 0_M \Rightarrow (r^{-1} r) m = 0_M \Rightarrow 1 m = 0_M$

$m = 0_M$

أي أن العنصر الفتل الوحيد في M هو 0_M صفر المودول) ولذلك يكون M عديم الفتل

نفرض أولاً أن M بسيط ولنثبت عندئذ تحقق الشرط :

بما أن M بسيط نوجد يوجد عنصر $m \neq 0$ وعندئذ

$1 m = m \in Rm \Rightarrow Rm \neq 0$ ومنه أن Rm مودول جزئي في M و M بسيط فيكون $Rm = M$

نفرض ثانياً أن الشرط محقق ولنثبت عندئذ أن M بسيط.

إن $M \neq 0$ محقق الشرط ولذلك فيوجد $0 \neq A \subset M$

يوجد $0 \neq a \in A$ ومنه تحقق الشرط يكون $Ra = M$ ولدينا

$M = Ra \subset A \subset M \Rightarrow A = M = Ra$

إذاً M لا يحوي أي مودول جزئي فعلي فهو بسيط

السؤال الثاني (30)

تكون المتتاليات المعطاة تامة إذا كانت كل من المتتاليات الجزئية تامة ولدينا :

$\xrightarrow{g} Ker f \hookrightarrow M$ تامة لأن g متباين

$\xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N$ تامة لأن $Im i = Ker f$

$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} N/Im f$ تامة لأن $Im f = Ker \pi$

$N \xrightarrow{\pi} N/Im f \to 0$ تامة لأن π غامر

وإذا كان M نضفا بسيط فهو مجموع مودولات بسيطة ولتكن ...

الحل: نعتبر A ... ومنه $B \cong A/\ker g$ (حيث A و B ...)

وكلمة بسيط فإن: إما $\ker g = \{0\}$ ومنه $A \cong A/0 \cong B$ إذن

B ... بسيط

أو $\ker g = A$ ومنه $A/A \cong B$ و $0 \cong$

مختلفا شكوك الصورة المباشرة لـ M هي مجموع مودولات جزئية بسيطة أو المودول

المطلوب الذي يحمله ... ولكن ... فإن $\mathrm{Im} f = N$ مجموع مودولات بسيطة فهو إذن نصف بسيط.

السؤال الثالث (2ن)

1) الفرض $\{m_1, \dots, m_k\}$ مجموعة مولدة لـ M على R ومنه أي عنصر $m \in M$ يكتب كتركيب خطي لهذه العناصر ... حيث $r_i \in R$

$$m = \sum_{i=1}^{k} r_i m_i \Rightarrow m + U = \sum_{i=1}^{k} r_i m_i + U = \sum_{i=1}^{k} r_i (m_i + U)$$

ما يعني أن العناصر $m_i + U$ ($i = 1, 2, \dots, k$) تولد المجال M/U.

2) إذا كان $M = U \oplus V$ فإن $M = U + V$ و $U \cap V = \{0\}$ ومنه نكون

$$M/U = U + V/U \cong V/U \cap V \cong V/\{0\} \cong V$$

أي أن V ... M/U وحيث أن M/U نحملة أساسية ومنتهية من عناصره فإن V المودول ... أساسية و منتهية العناصر.

السؤال الرابع (2ن)

1) ($\Leftarrow$) نفرض أن M نيوتري ولتكن $\mathcal{L}$ جماعة غير خالية من المودولات الجزئية في M ولنفرض أنها M_0. فإذا كان M_0 أعظميا في $\mathcal{L}$ يتم المطلوب وإلا يوجد في $\mathcal{L}$ عنصر M_1 حيث $M_0 \subsetneq M_1$. فإذا كان M_1 أعظميا في $\mathcal{L}$ يتم المطلوب وإلا يوجد في $\mathcal{L}$ عنصر M_2 حيث أن $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2$، وهكذا باستمرار هذه العملية نحصل على سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M: $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots$ فإن M نيوتري فإنه تتوقف أي يوجد عدد طبيعي n

أي أن $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n = M_{n+1} = \dots$ أي $M_n = M_k$ من أجل كل $k \geq n$ ومنه M_n أعظمي في $\mathcal{L}$

1) ($\Rightarrow$) إذا كان M نيوتريا ... [illegible] من المودولات الجزئية في M ليس فيها عنصر أعظمي مما يتناقض مع الفرض ... M نيوتري.

$A, B \in S$ ... $\Leftrightarrow$ $D \circ \vec{V}(A) = D \circ \vec{V}(B$